

Algèbre Linéaire - 3 : Endomorphismes

(youpie c'est le dernier !)

NOM et PRENOM : *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. **Théorie.** a. Expliquez pourquoi, pour une valeur propre *simple* ($\text{mult}(\lambda) = 1$), le sous-espace propre E_λ associé est forcément de dimension 1.

Pour les parties b et c : faites simple !

- b. Dans un espace $\mathbb{R}^n$, peut-on avoir une symétrie dont le déterminant vaut 3 ?

- si OUI : donnez un exemple ;
- si NON : justifiez.

- c. Dans un espace $\mathbb{R}^n$, peut-on avoir une symétrie dont la trace vaut 3 ?

- si OUI : donnez un exemple ;
- si NON : justifiez.

2. Un endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ est donné par sa matrice $H = \begin{pmatrix} 1-m & -2m \\ -3m & m-1 \end{pmatrix}$, $m \neq 0$.

- a. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle h est une projection ? Répondez avec **deux méthodes différentes** (faites simple).

- b. Déterminez une valeur de m (non nulle) pour laquelle h pourrait être une symétrie. Effectuez la diagonalisation complète (y.c. changement de base) dans les règles de l'art puis décrivez géométriquement cette symétrie.

Tournez s.v.p. ./.

3. GAP 2008.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $B = (e_1; e_2; e_3)$ est

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -12 & 6 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3.1 Chercher les images des vecteurs $(1; 0; 4)$ et $(1; 3; -2)$. Que peut-on en déduire ?
- 3.2 Calculer les valeurs propres de F et donner une base des sous-espaces vectoriels associés.
- 3.3 Trouver une base B' dans laquelle la matrice F est diagonalisable et donner la matrice diagonale.
- 3.4 Décrire géométriquement l'application f .
- 3.5 En déduire $Im(f)$ et $Ker(f)$.